

保密★启用前

准考证号 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_

(在此卷上答题无效)

# 福建省部分地市 2023 届高中毕业班第一次质量检测

## 数学试题

2023. 1

本试卷共 4 页, 考试时间 120 分钟, 总分 150 分。

### 注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A, B, U$  满足  $A \subsetneq B \subsetneq U$ , 则  $U =$   
A.  $A \cup (\complement_U B)$     B.  $B \cup (\complement_U A)$     C.  $A \cap (\complement_U B)$     D.  $B \cap (\complement_U A)$
2. 设  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ) 在复平面内对应的点为  $M$ , 则“点  $M$  在第四象限”是“ $ab < 0$ ”的  
A. 充分不必要条件    B. 必要不充分条件  
C. 既不充分也不必要条件    D. 充要条件
3. 设  $a = \log_5 8$ ,  $b = 2^{1.3}$ ,  $c = 0.7^{1.3}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为  
A.  $c < b < a$     B.  $b < a < c$     C.  $b < c < a$     D.  $c < a < b$
4. 函数  $f(x) = a \sin x + b \cos 2x + c \sin 4x$  ( $a, b, c \in \mathbf{R}$ ) 的最小正周期不可能是  
A.  $\frac{\pi}{2}$     B.  $\pi$     C.  $\frac{3}{2}\pi$     D.  $2\pi$
5. 过抛物线  $C: y^2 = 4x$  的焦点作直线  $l$ ,  $l$  交  $C$  于  $M, N$  两点, 若线段  $MN$  中点的纵坐标为 2, 则  $|MN| =$   
A. 10    B. 9    C. 8    D. 7
6. 函数  $f(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$  ( $\omega \in \mathbf{R}$ ) 恒有  $f(x) \leq f(2\pi)$ , 且  $f(x)$  在  $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$  上单调递增, 则  $\omega$  的值为  
A.  $-\frac{5}{6}$     B.  $\frac{1}{6}$     C.  $\frac{7}{6}$     D.  $\frac{1}{6}$  或  $\frac{7}{6}$

7. 在正四棱台  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB=2AA_1=2A_1B_1=2\sqrt{2}$ , 且各顶点都在同一球面上, 则该球体的表面积为

- A.  $20\pi$       B.  $5\sqrt{5}\pi$       C.  $10\pi$       D.  $5\pi$

8. 双曲线  $C: \frac{y^2}{3} - x^2 = 1$  的下焦点为  $F$ , 过  $F$  的直线  $l$  与  $C$  交于  $A, B$  两点, 若过  $A, B$  和点  $M(0, \sqrt{7})$  的圆的圆心在  $x$  轴上, 则直线  $l$  的斜率为

- A.  $\pm \frac{\sqrt{10}}{2}$       B.  $\pm \sqrt{2}$       C.  $\pm 1$       D.  $\pm \frac{3}{2}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 记正项等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 则下列数列为等比数列的有

- A.  $\{a_{n+1} + a_n\}$       B.  $\{a_{n+1}a_n\}$       C.  $\{\frac{S_n}{a_n}\}$       D.  $\{S_n S_{n+1}\}$

10. 已知正实数  $x, y$  满足  $x+y=1$ , 则

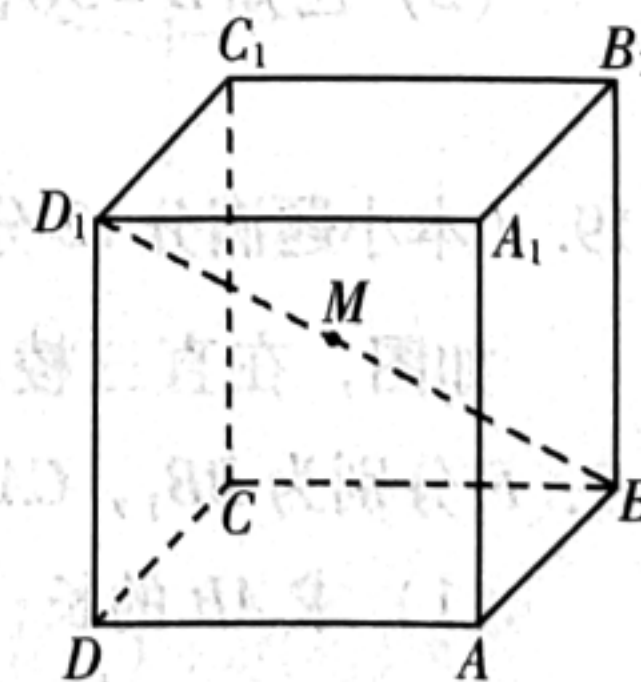
- A.  $x^2 + y$  的最小值为  $\frac{3}{4}$   
 B.  $\frac{1}{x} + \frac{4}{y}$  的最小值为 8  
 C.  $\sqrt{x} + \sqrt{y}$  的最大值为  $\sqrt{2}$   
 D.  $\log_2 x + \log_4 y$  没有最大值

11. 平面向量  $m, n$  满足  $|m| = |n| = 1$ , 对任意的实数  $t$ ,  $|m - \frac{1}{2}n| \leq |m + tn|$  恒成立, 则

- A.  $m$  与  $n$  的夹角为  $60^\circ$       B.  $(m + tn)^2 + (m - tn)^2$  为定值  
 C.  $|n - tm|$  的最小值为  $\frac{1}{2}$       D.  $m$  在  $m + n$  上的投影向量为  $\frac{1}{2}(m + n)$

12. 如图, 在棱长为 1 的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 点  $M$  为线段  $BD_1$  上的动点 (含端点), 则

- A. 存在点  $M$ , 使得  $CM \perp$  平面  $A_1DB$   
 B. 存在点  $M$ , 使得  $CM \parallel$  平面  $A_1DB$   
 C. 不存在点  $M$ , 使得直线  $C_1M$  与平面  $A_1DB$  所成的角为  $30^\circ$   
 D. 存在点  $M$ , 使得平面  $ACM$  与平面  $A_1BM$  所成的锐角为  $45^\circ$





三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知空间中三点  $A(1, 1, \sqrt{3})$ ,  $B(1, -1, 2)$ ,  $C(0, 0, 0)$ , 则点  $A$  到直线  $BC$  的距离为\_\_\_\_\_.

14. 以下为甲、乙两组按从小到大顺序排列的数据:

甲组: 14, 30, 37,  $a$ , 41, 52, 53, 55, 58, 80;

乙组: 17, 22, 32, 43, 45, 49,  $b$ , 56.

若甲组数据的第40百分位数和乙组数据的平均数相等, 则  $4a - b =$ \_\_\_\_\_.

15. 写出一个同时满足下列三个性质的函数  $f(x) =$ \_\_\_\_\_.

①若  $xy > 0$ , 则  $f(x+y) = f(x)f(y)$ ; ②  $f(x) = f(-x)$ ; ③  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减.

16. 近年来, “剧本杀” 门店遍地开花. 放假伊始, 7 名同学相约前往某 “剧本杀” 门店体验沉浸式角色扮演型剧本游戏, 目前店中仅有可供 4 人组局的剧本, 其中  $A$ ,  $B$  角色各 1 人,  $C$  角色 2 人. 已知这 7 名同学中有 4 名男生, 3 名女生, 现决定让店主从他们 7 人中选出 4 人参加游戏, 其余 3 人观看, 要求选出的 4 人中至少有 1 名女生, 并且  $A$ ,  $B$  角色不可同时为女生. 则店主共有\_\_\_\_\_种选择方式.

四、解答题：本题共6小题，共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分10分)

已知正项数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $4S_n = (a_n - 1)(a_n + 3)$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ).

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 将数列  $\{a_n\}$  和数列  $\{2^n\}$  中所有的项, 按照从小到大的顺序排列得到一个新数列  $\{b_n\}$ , 求  $\{b_n\}$  的前 50 项和.

18. (本小题满分12分)

记  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $3\vec{AB} \cdot \vec{AC} + 4\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \vec{CA} \cdot \vec{CB}$ .

(1) 求  $\frac{b}{c}$ ;

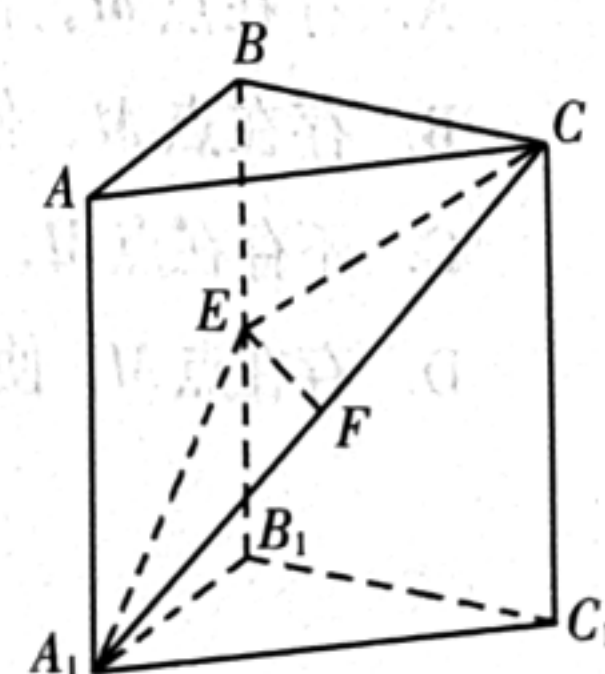
(2) 已知  $B = 3C$ ,  $c = 1$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

19. (本小题满分12分)

如图, 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AC = \sqrt{2}$ ,  $AB \perp BC$ ,  $E, F$  分别为  $BB_1, CA_1$  的中点, 且  $EF \perp$  平面  $AA_1C_1C$ .

(1) 求  $AB$  的长;

(2) 若  $AA_1 = \sqrt{2}$ , 求二面角  $C - A_1E - A$  的余弦值.





20. (本小题满分12分)

校园师生安全重于泰山,越来越多的学校纷纷引进各类急救设备.某学校引进  $M$ ,  $N$  两种类型的自动体外除颤器(简称 AED)若干,并组织全校师生学习 AED 的使用规则及方法.经过短期的强化培训,在单位时间内,选择  $M$ ,  $N$  两种类型 AED 操作成功的概率分别为  $\frac{2}{3}$  和  $\frac{1}{2}$ , 假设每次操作能否成功相互独立.

(1) 现有某受训学生进行急救演练,假定他每次随机等可能选择  $M$  或  $N$  型 AED 进行操作,求他恰好在第二次操作成功的概率;

(2) 为激发师生学习并正确操作 AED 的热情,学校选择一名教师代表进行连续两次设备操作展示,下面是两种方案:

方案甲:在第一次操作时,随机等可能的选择  $M$  或  $N$  型 AED 中的一种,若第一次对某类型 AED 操作成功,则第二次继续使用该类型设备;若第一次对某类型 AED 操作不成功,则第二次使用另一类型 AED 进行操作.

方案乙:在第一次操作时,随机等可能的选择  $M$  或  $N$  型 AED 中的一种,无论第一次操作是否成功,第二次均使用第一次所选择的设备.

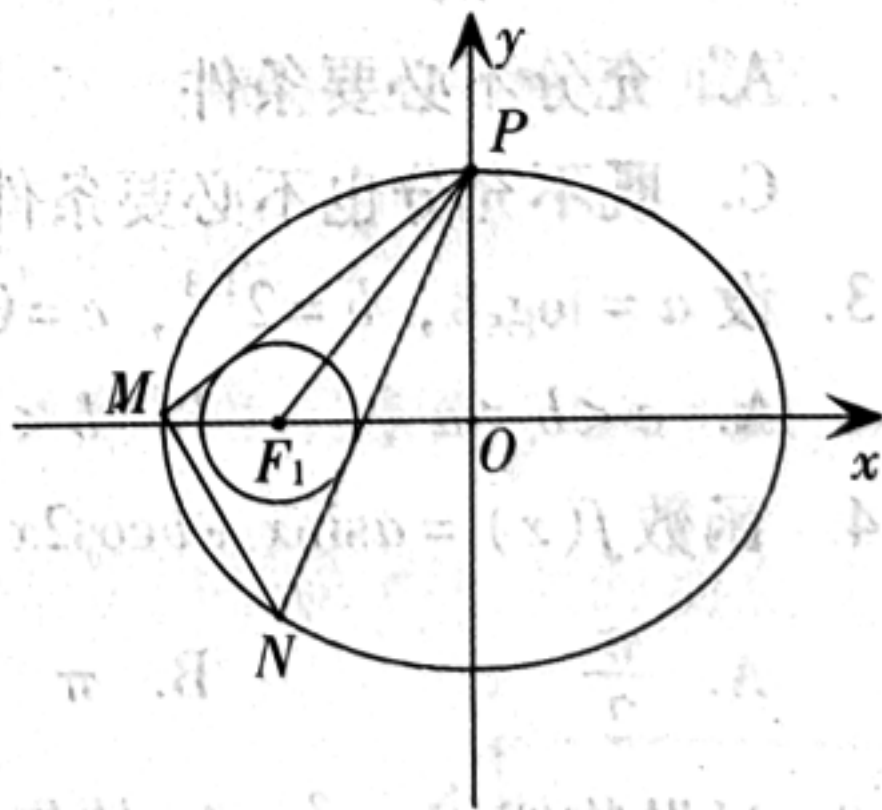
假定方案选择及操作不相互影响,以成功操作累积次数的期望值为决策依据,分析哪种方案更好?

21. (本小题满分12分)

已知椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 其左焦点为  $F_1(-2, 0)$ .

(1) 求  $\Gamma$  的方程;

(2) 如图,过  $\Gamma$  的上顶点  $P$  作动圆  $F_1$  的切线分别交  $\Gamma$  于  $M$ ,  $N$  两点,是否存在圆  $F_1$  使得  $\triangle PMN$  是以  $PN$  为斜边的直角三角形? 若存在,求出圆  $F_1$  的半径;若不存在,请说明理由.



22. (本小题满分12分)

已知函数  $f(x) = e^x - \frac{ax^2}{2}, a > 0$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的极值点个数;

(2) 若  $f(x)$  有两个极值点  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 < x_2$ , 当  $e < a < \frac{e^2}{2}$  时, 证明:  $f(x_1) + 2f(x_2) < \frac{3e}{2}$ .